

$K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E K -ev de dim. finie $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$ (1).
 $f \in L(E)$. $A = \text{Mat}(f)$.

I. Définitions. premières propriétés.

Def 1: Soit $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in K[X]$.

Pour $f \in L(E)$, on note $P(f) = a_0 + a_1 f + \dots + a_n f^n$, et $P(f)$ est appelé un **polynôme d'endomorphisme**.

Prop 1: Soit $f \in L(E)$. L'application: $P \mapsto P(f)$ est un **morphisme d'algèbres** unitaires de $K[X]$ dans $L(E)$, i.e.:

$$\forall \alpha \in K, \forall P, Q \in K[X], \begin{cases} (\alpha P + Q)(f) = \alpha P(f) + Q(f) \\ (PQ)(f) = P(f) \circ Q(f) \\ 1(f) = \text{Id}_E \end{cases}$$

Attention, cette application peut n'être ni inject., ni surj.

Prop 2: Si $f, g \in L(E)$ commutent, alors tout polynôme en f **commute** avec tout polynôme en g .

II. Polynômes annulateurs.

A. Généralités (Monier).

Def 2: Soient $f \in L(E)$, $P \in K[X]$. on dit que P annule f , ou que P est **annulateur de f** ssi $P(f) = 0$.

Exemples: f projecteur ssi $X^2 - X$ annule f .
 f symétrie ssi $X^2 - 1$ annuleur de f .

$f \in L(E)$ admet au moins un polynôme annulateur autre que 0.

Prop 3: Si $\lambda \in \text{Sp}(f)$, $x \in E_\lambda$: $\forall P \in K[X], (P(f))(x) = P(\lambda)x$.

Cor: Si P est un polynôme annulateur de f , alors $\text{Sp}(f) \subset P^{-1}(\{0\})$. Les val. pps de f st racines de P .

Une relation liant les puissances de A (ou de f), avec $A^0 = \text{Id}$, donne un polynôme annulateur.

Exemple: (Sorosina ex.9.2 p.243) Valeurs propres de: $f: A \mapsto {}^t A$. Le polynôme $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$ est annulateur, les valeurs propres sont 1 et -1.

Application 1: f est **diagonalisable** ssi f admet un polynôme annulateur scindé sur K à zéros simples.

Exemple: Tout projecteur annule $X(X-1)$ scindé simple, donc est diagonalisable. De même pour toute symétrie, qui annule $(X-1)(X+1)$.

B. Polynôme caractéristique (Monier).

Def 3: L'application de K dans K : $\lambda \mapsto \det(f - \lambda I_n)$, est un polynôme appelé **polynôme caractéristique** de f et noté χ_f (ou de A , noté $\chi_A = \det(A - \lambda I_n)$).

Prop 4:

$$\forall \lambda \in K, \chi_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(A) \lambda^{n-1} + \dots + \det(A)$$

En particulier, χ_A (ou χ_f) est de degré n .

Exemples: (Sorosina p.240)

$$\text{Si } n=2, \chi_A(X) = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A)$$

$$\text{Si } n=3, \chi_A(X) = -X^3 + \text{tr}(A)X^2 - \text{tr}(\text{com}(A))X + \det(A)$$

Prop 5: $\text{Sp}_K(f) = \chi_f^{-1}(\{0\})$, i.e. les **zéros** du polynôme caractéristique sont les **valeurs propres** de f . (de A).

Cor: Le spectre d'un endomorphisme de E est une partie finie de K ayant au plus n éléments.

Exemple: (Monier) Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de f dont la matrice est:

$$\begin{pmatrix} 8 & 12 & 10 \\ -9 & -22 & -22 \\ 9 & 18 & 17 \end{pmatrix}$$

Def 4: Soit λ_0 une valeur propre de f . On appelle **ordre de multiplicité** de λ_0 , et on note ω_0 son ordre de multiplicité en tant que zéro de χ_f .

Prop 6: $0 \leq \dim E_{\lambda_0} \leq \omega_0$. En particulier, λ_0 est une racine simple de χ_f , alors $\dim E_{\lambda_0} = 1$.

Application 2: f est **diagonalisable** ssi:

$\begin{cases} \chi_f \text{ est scindé sur } K \\ \forall \lambda \in \text{Sp}(f), \dim E_\lambda = \text{ordre de multiplicité de } \lambda \end{cases}$
En particulier, si f admet n valeurs propres distinctes, f est diagonalisable. trigonalisable ssi χ_f est scindé.

Exemple: Diagonaliser $\text{Mat}(f) = A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

----- Monier: passage au § "polynômes annulateurs"

Th 1: Cayley-Hamilton: $\chi_f(f) = 0$. (Monier p.85).

Lemme des noyaux: $N \in \mathbb{N}^*$. Soient $P_1, \dots, P_N \in K[X]$ premiers entre eux deux à deux.

Alors les sev $\text{Ker}(P_i(f))$ sont en somme directe, et:

$$\bigoplus_{i=1}^N \text{Ker}(P_i(f)) = \text{Ker}\left(\left(\prod_{i=1}^N P_i\right)(f)\right).$$

En particulier, si $\prod_{i=1}^N P_i$ est annulateur de f , alors

$$\bigoplus_{i=1}^N \text{Ker}(P_i(f)) = E.$$

Application 3: réduction à la forme diagonale par blocs.

Avec les mêmes hypothèses et notations, si $\chi_f = \prod_{i=1}^N P_i$,

il existe des matrices A_i de taille $\dim(\text{Ker}(P_i))$ tq:

$$\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n \end{pmatrix}$$

C. Polynôme minimal (Monier).

Prop 7: $\forall f, \exists P_0 \in K[X]$ tq $\forall P \in K[X], (P(f)=0 \Leftrightarrow P_0|P)$.

Def 5: on dit que f admet un polynôme minimal ssi l'ens. des polys annulateurs de f n'est pas réduit à $\{0\}$.

Alors $\exists!$ poly unitaire π_f tq l'ensemble des polys annulateurs de f soit $\pi_f \cdot K[X]$. π_f est appelé **polynôme minimal** de f .

Application: f est **diagonalisable** ssi π_f est scindé simple.

Prop 8: (Grifone) Les **zéros** de π_f sont les mêmes que celles de χ_f , i.e. **les valeurs propres de f** , avec une multiplicité en générale inférieure.

Si $\chi_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$,

alors $\pi_f(X) = (X - \lambda_1)^{\beta_1} \dots (X - \lambda_p)^{\beta_p}$, $1 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.

Exemple: (Grifone) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$\chi_f(X) = -(X-1)(X+2)^2$, $\pi_f(X) = (X-1)(X+2)$.

Application: f est **trigonalisable** ssi π_f est scindé sur K .
(tjrs vrai sur $\mathbb{C}$ algébriquement clos).

Exercice: (Gourdon p.176) Soit E un K -ev et $f \in L(E)$ admettant un polynôme minimal. Si f est inversible, mq f^{-1} est un polynôme en f . (peut se résoudre en dim. finie avec le polynôme caractéristique).

Généralisation: Exponentielle de matrices,

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

III. Notes.

(1) En dimension infinie, la notion de matrice n'a pas de sens, hormis une généralisation ds qqs cas particuliers.